Zespół Szkół Informatycznych
ul. Koszalińska 9, 76-200 Słupsk
e-mail: monikaskwarek@interia.pl
tel: (059) 845 60 70

Geometria sferyczna i euklidesowa

Katarzyna Wrońska
III klasa Technikum Weterynarii
Opiekun pracy: Monika Skwarek

Wstęp do geometrii

1. Geometria - podstawowe zagadnienia

Zanurzając się w działy matematyki poprzez lata najczęściej spotykaną dziedziną jest geometria. Towarzyszy ona człowiekowi w dużo bardziej zauważalny sposób niż inne działy matematyki, które opierają się na logicznym zrozumieniu samych liczb bez odniesienia do otaczającego nas świata. Geometria, zwłaszcza sferyczna, jest dostrzegalna w otaczającym nas wszechświecie ale również tu na Ziemi.

Geometria to dział matematyki zajmujący się badaniem zagadnień długości powierzchni, odległości, pól powierzchni, miar kątów oraz bardziej zaawansowanych takich jak krzywizny, punkty stałe i wymiary. Dziedzina ta należy do jednych z najstarszych nauk a za jej przewodnika uznawany jest Euklides, wprowadził on pierwszy aksjomat w matematyce dotyczący zagadnień geometrii.

2. Geometria euklidesowa

Geometria euklidesowa – najprostsza geometria, która zakładała badania tylko na płaskiej powierzchni oraz trójwymiarze i miała opisywać jedynie świat fizyczny. Tym samym uniemożliwiła rozwój badań nad pozostałymi rodzajami geometrii.

Geometria euklidesowa zbudowana została w oparciu o aksjomaty (twierdzenia, które z góry trzeba uznać za prawidłowe). Euklides wyróżnił pięć następujących aksjomatów:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Dotyczą geometrii płaskiej

3. Uzupełnienie aksjomatów Euklidesa

Niemiecki matematyk David Hilberg pod koniec XIX wieku uzupełnił niepełny system pewników Euklidesa[1)] :

A) pojęcia pierwotne:

- płaszczyzna *P*
- podzbiory płaszczyzny *L*
- odległość geometryczna funkcja $d : P \times P \to R \cup \{0\}$ (liczby rzeczywiste oraz 0)

B) aksjomaty Hilberga (geometria dwuwymiarowa):

1. Aksjomaty incydencji:

* I1 : Dla dowolnych różnych punktów *A, B € P* istnieje dokładnie jedna prosta *l € L* taka, że *A, B € l.* Oznaczamy ją przez : *AB*

* I2 : Każda prosta ma co najmniej dwa punkty

* I3 : Istnieją trzy punkty nie należące do jednej prostej. Takie punkty nazywamy niewspółliniowymi

2. Aksjomaty uporządkowania:

* O1 : Na każdej prostej istnieją dwa wzajemnie odwrotne relacje liniowego porządku

3. Aksjomaty odległości (m.in.):

* D1 : Dla dowolnych *A, B € P: d(B, A) = d(A, B)*

4. Aksjomaty symetrii (m.in.):

* S2 : Dla dowolnych półprostych *AB→ i AC→* istnieje co najmniej jedna prosta *l* taka, że s_l *(AB→) = AC→*

5. Aksjomat równoległości:

* E : (*aksjomat Euklidesa*) Dla dowolnej prostej *l € L* i dowolnego punktu *A € P \ l* istnieje dokładnie jedna prosta *m € L* taka, że *A €m* oraz *m ∩ l =* □

[1)] system pewników Euklidesa – zestaw pięciu aksjomatów w oparciu o które swój system oparli kolejni matematycy

Geometria sferyczna

1. Wstęp do geometrii sferycznej

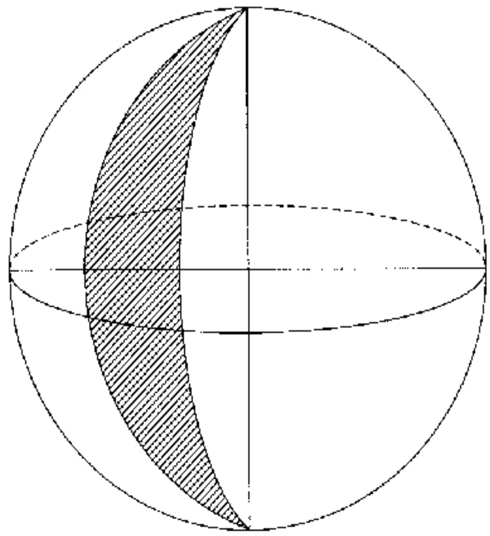
Geometria sferyczna zajmuje się działem geometrii dotyczącym badania właściwości figur należących do powierzchni kuli. Rolę prostych odgrywają koła wielkie sfery (czyli powierzchni kuli). Na niej przez dwa punkty nie będące końcami jej średnicy przechodzi tylko jedno koło wielkie.

W geometrii sferycznej bada się takie figury jak:

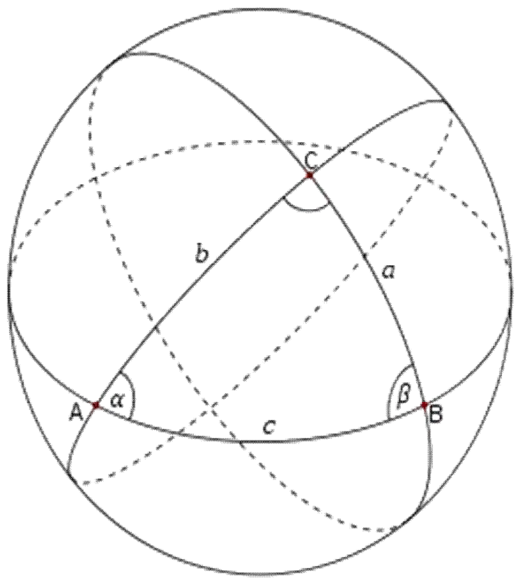
- dwukąty,
- trójkąty sferyczne,
- wielokąty sferyczne.

Przy czym związkami między bokami i kątami trójkątów sferycznych zajmuje się trygonometria sferyczna.

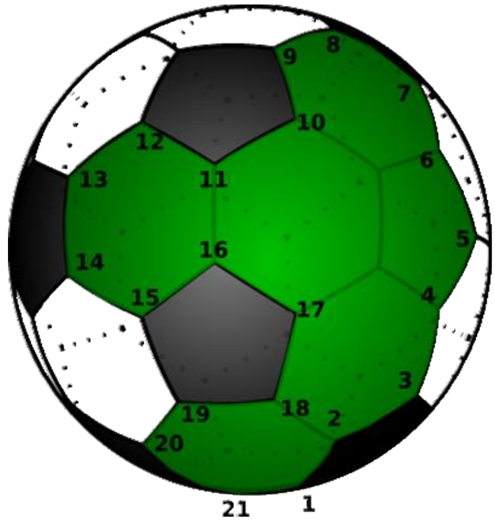
Dwukąt sferyczny – figura przestrzenna; jest to część sfery ograniczona dwiema płaszczyznami przechodzącymi przez jej środek, np. może być nim część Ziemi między południkami.



Trójkąt sferyczny - figura przestrzenna; powstaje poprzez ograniczenie powierzchni sfery trzema łukami kół wielkich, które muszą przecinać się w wierzchołkach. Powstaje wtedy 8 trójkątów sferycznych z czego jeden jest trójkątem Eulerowskim[2)].

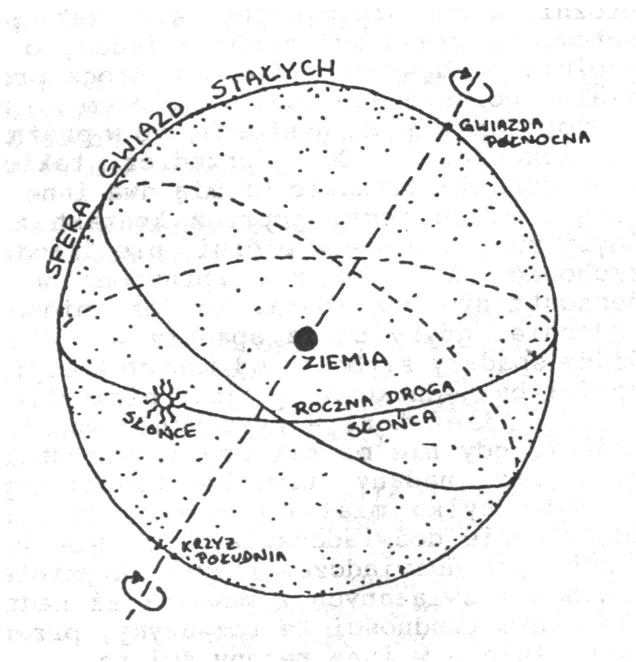


Wielokąt sferyczny – figura przestrzenna; jest to wielokąt geodezyjny na sferze, czyli figura ograniczona łukami na sferze; np. sześciokąty składające się na piłkę.



Okrąg wielki jest to część wspólna sfery i płaszczyzny przechodzącej przez środek kuli.
Przez każde dwa punkty na powierzchni sfery, nie będące końcami tej samej średnicy, przechodzi dokładnie jedno koło wielkie. Mniejszy z łuków tego koła, o końcach w danych punktach, jest najkrótszą krzywą łączącą te punkty, a jego długość nazywamy odległością pomiędzy punktami na kuli.

Kąt przecięcia łuków dwóch kół wielkich jest wyznaczony przez kąt jaki tworzą styczne do tych łuków poprowadzone w punkcie przecięcia.



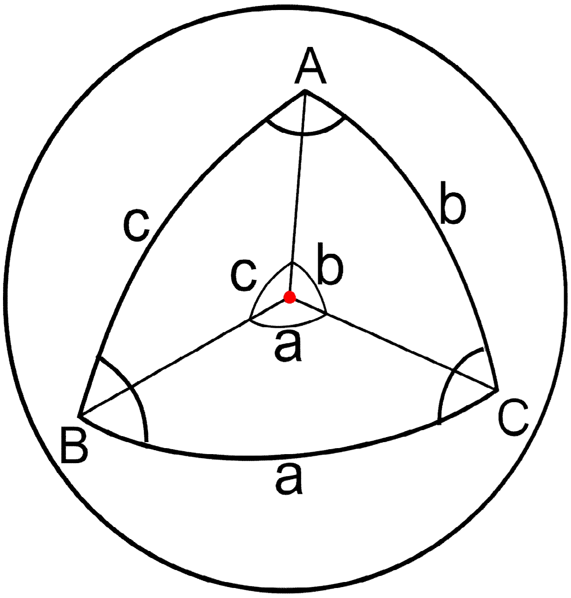
[2)]więcej o trójkącie Eulerowskim w „Trygonometrii sferycznej. Trójkąt Eulerowski”

2. Trygonometria sferyczna

Trygonometria zajmuje się badaniem własności funkcji trygonometrycznych i zastosowaniem w geometrii. Powstała znacznie wcześniej niż płaska, znajdując zastosowanie w astronomii Trygonometria sferyczna zajmuje się właściwościami trójkątów na powierzchni kuli.

Dla każdego trójkąta sferycznego prawdziwe są wzory:
- *sinusów*
- *cosinusów dla boków*
- *cosinusów dla kątów*
- *cotangensów*
- *na pole trójkąta*

2.1. Własności trójkątów sferycznych



A, B, C – kąty, wierzchołki trójkąta
a, b, c – boki trójkąta

Powyższy trójkąt jest określony na trzech łukach (odcinkach) kół wielkich. Jego boki są analogiczne do kątów przy środku sfery : większy bok → większy kąt.

1) Suma kątów wewnętrznych : 180º - 540º

2) **Obwód** : nie może być większy od obwodu koła wielkiego, czyli **Ob < 2ΠR**

3) **Pole** : pole nie może być większe niż połowa obwodu sfery, czyli **P < 2ΠR²**

*R – promień sfery

Eksces sferyczny – nadmiar sferyczny – gdy suma kątów wyniesie ponad 180º oznaczana jest grecką literą „ε ”

$$\mathbf{A + B + C - 180° = \varepsilon}$$

4) Każdy element trójkąta sferycznego jest <180° .

5) Suma boków trójkąta sferycznego jest mniejsza od 360°;

$$0° < a + b + c < 360°$$

6) Suma kątów A+B+C trójkąta sferycznego jest zawsze większa od 180° i mniejsza od 540°;

$$180° < A + B + C < 540°$$

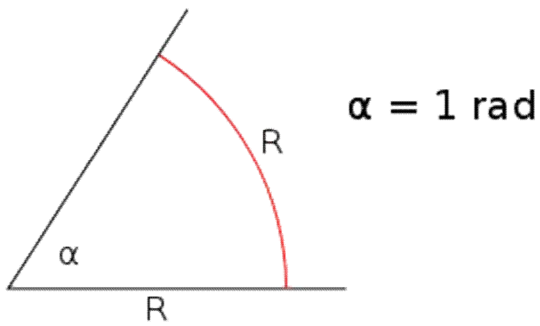
7) Bok każdego trójkąta sferycznego jest większy od wartości bezwzględnej różnicy dwóch pozostałych boków i mniejszy od ich sumy;

$$|b - c| < a < b + c$$

8) W trójkącie sferycznym suma dwóch kątów jest mniejsza od trzeciego kąta powiększonego o 180°;

$$A + B < C + 180°$$

Wartości trójkątów sferycznych podawane sią w radianach. Jest to jednostka miary łukowej kąta, określana jako długość *l* łuku o środku w wierzchołku *α* i jego promienia *r*:



ze wzoru:

a) **1 rad** = 180° : Π ≈ **57,3°**

np.: 0,2 rad = 0,2 x 57,3 = 11,46°

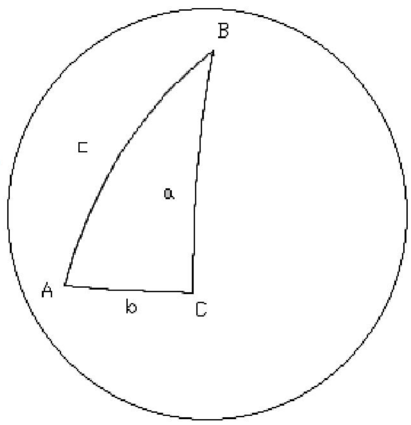
b) **1°** = Π : 180° ≈ **0,017 rad**

np.: 20° = 0.017 x 20 = 0,34 rad

2.2.Trójkąt Eulerowski

Trójkąt Eulerowski to taki trójkąt, którego każdy z kątów jest mniejszy niż 180°

Szczególne znaczenie należy mu przypisać jeżeli chodzi o geodezję oraz nawigację. Dysponując współrzędnymi sferycznymi punktów możemy obliczyć ich wzajene odległości liniowe i kątowe.



1) Twierdzenia sinusów

sin a : sin A = sin b : sib B = sin c : sin C

Stosowane, gdy znamy trzy elementy trójkąta, z których dwa są do siebie przeciwległe. Możemy znaleźć wtedy element przeciwległy do trzeciego z nich. Rozwiązanie zawiera dwa wyniki, z czego poprawne może być tylko jedno z nich lub oba. Prawdziwość wyniku opieramy na znajomości własności trójkątów sferycznych.

np.: Oblicz kąt B, wiedząc że bok a wynosi 56°21`, bok b = 89°11` a kąt A jest równy 44°47`.

1. Wiemy, że → sin a : sin A = sin b : sin B
2. Przekształcamy wzór → sin B = (sin b : sin a) x sin A
3. Podstawiamy do wzoru → sin B = (0,999898 : 0,832438) x 0,704428
4. Otrzymujemy wynik → sin B = 0,846137
5. Biorąc pod uwagę, że rozwiązanie wychodzi w dwóch wariantach odpowiedzi obliczamy B → B = arcsin (0,846137) = 57° 47,63` / 122°12,37`
6. Sprawdzamy rozwiązania zgodnie z własnościami trójkątów sferycznych:
   - b > a , czyli B > A
   - 57° 47,63` > 44°47` oraz 122°12,37` > 44°47`
7. Obie odpowiedzi są poprawne, czyli otrzymujemy dwa trójkąty

np.: Dane są dwa kąty trójkąta sferycznego: A= 124° oraz B = 45°. Znany jest również jeden z boków a = 101°

1. Wzór podstawowy → sin a : sin A = sin b : sin B
2. Przekształcenie wzoru → sin b = (sin a : sin A) x sin B
3. Podstawienie do wzoru → sin b = (0,981627 : 0,829038) x 0,707107
4. Otrzymany wynik to → sin b = 0,837254
5. Obliczanie b → arcsin (0,837254) = 56°51,08` / 123°08,92`
6. sprawdzanie zgodnie z własnościami trójkątów sferycznych: A>B, czyli a>b - 101°> 56°51,08` (123°08,92`>101°)
7. Bok b = 56°51,08`

2) Twierdzenie cosinusów dla boków

cos a = cos b * cos c + sin b * sin c * cos A

cos b = cos a * cos c + sin a * sin b * cos B

cos c = cos b * cos a + sin b * sin a * cos C

Powyższe wzory stosujemy, gdy znamy trzy boki trójkąta (możemy znaleźć wtedy trzy kąty); lub gdy znamy dwa boki i kąt między nimi zawarty (możemy znaleźć wtedy trzeci bok).

np.: Dane są trzy boki trójkąta:

- a = 87º 47`
- b = 25º 02`
- c = 104º 45`

Oblicz kąt A.

1. Przekształcamy wzór cos a tak aby móc obliczyć cos A i otrzymujemy :

   cos A = (cos a – cos b x cos c) : sin b x sin c
2. Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy wartości odpowiadające kolejnym bokom i podstawiamy.
3. Otrzymujemy wynik, który po odczytaniu z tabeli daje kąt równy 48º 49,93`

np.: Dane są dwa boki i kąt:

- a = 66º 25,7`
- b = 124º 12,6`
- C = 83º 26,7`

Oblicz bok c.

1. Podstawiamy do wzoru : cos c = cos b x cos a + sin b x sin a x cos C
2. Otrzymujemy wynik cos c = -0,13831
3. Odczytujemy wartości z tabeli
4. Bok c = 97º 57`

3) Twierdzenie cosinusów dla kątów

cos A = - cos B * cos C + sin B * sin C * cos a

cos B = - cos A * cos C + sin A * sin C * cos b

cos C = - cos B * cos A + sin B * sin A * cos c

Stosujemy, gdy znamy trzy kąty trójkąta (możemy znaleźć wtedy trzy boki); lub gdy znamy dwa kąty i bok między nimi zawarty (możemy znaleźć wtedy trzeci kąt).

np.: Oblicz bok b dla danych kątów:

- A = 78º 25`
- B = 89º 45`
- C = 89º 39`

1. Przekształcamy wzór dla cos B i otrzymujemy wzór :

   cos b = (cos B + cos A x cos C) : sin A x sin C
2. Podstawiamy odczytane z tabeli dane do wzoru

3. Otrzymujemy wynik cos b = 0,005706
4. Odczytujemy wartość dla powyższego cosinusa
5. Bok b wynosi 89^o 40,4`

np.: Oblicz kąt C, jeśli wiesz, że:
- A = 65^o 12`
- B = 74^o 33`
- c = 76^o 44,6`

1. Podstawiamy do wzoru : cos C = - cos B x cos A + sin B x sin A x cos c
2. Otrzymujemy wynik cos C = 0,088894
3. Kąt C ma wartość równą 84^o 54`

4) Twierdzenie cotangensów

sin c * ctg a – sin B * ctg A = cos B * cos c

sin c * ctg b – sin A * ctg B = cos A * cos c

sin b * ctg c – sin A * ctg C = cos A * cos b

sin b * ctg a – sin C * ctg A = cos C * cos b

sin a * ctg b – sin C * ctg B = cos C * cos a

sin a * ctg c – sin B * ctg C = cos B * cos a

3. Podsumowanie geometrii sferycznej ze szczególnym zwróceniem uwagi na trygonometrię sferyczną

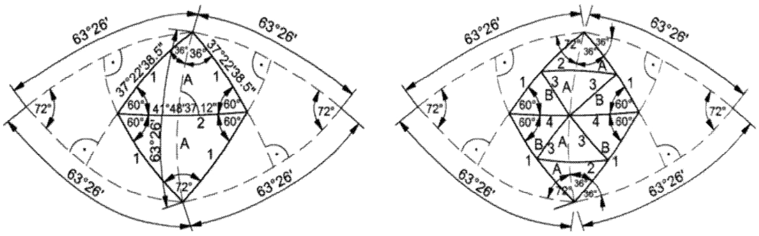
Opierając się na wykładach dr hab. Leszka Smolarka oraz innych źródłach opracowałam niektóre zagadnienia dotyczące geometrii sferycznej, w szczególności skupiając się na trygonometrii, która znajduje szerokie zastosowanie w nawigacji, astronomii i geodezji.

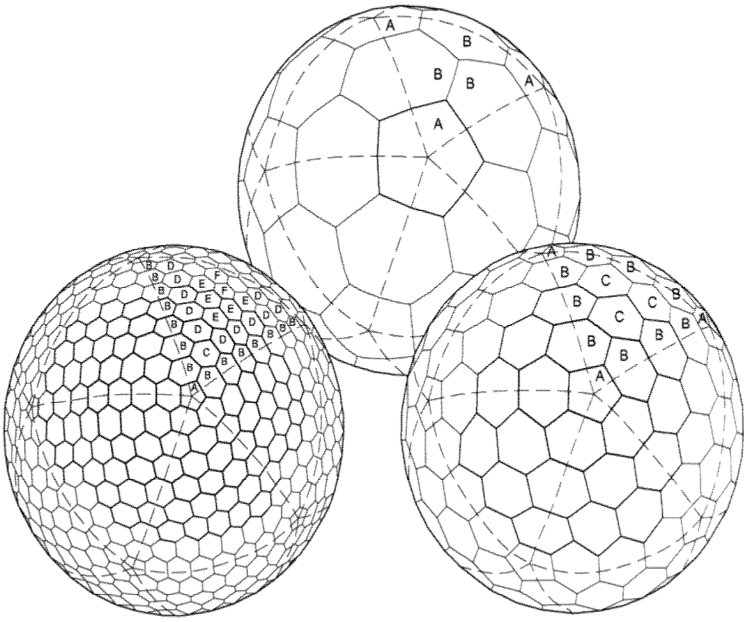
Trygonometria sferyczna staje się zagadkowa i niezwykła, gdy porównamy ją z trygonometrią płaską. Uczniowie szkół średnich uczni są, że trójkąt zawsze i w każdym przypadku musi mieć minimum dwa kąty ostre, a suma kątów w trójkącie nie może przekroczyć 180^o . Okazuje się jednak, że jest to jedynie zawężenie pola matematyki, w którym uczniowie mają się obracać. Obliczenia trójkątów i figur na sferze są działaniami abstrakcyjnymi, które wymagają poznania i zrozumienia podstaw.

Zastosowania geometrii sferycznej:
- badanie odległości na kuli ziemskiej
- geodezja
- badanie powierzchni ciał kulistych
- wymierzanie odpowiednich figur mających otaczać ciało kuliste (np.: sześciokąty na piłce, kopuły)

Zastosowania trygonometrii sferycznej:
- nawigacja (trójkąt Eulerowki jako podstawa do odczytywania odległości na powierzchni kuli ziemskiej)

- obliczanie kątów i boków trójkątów sferycznych





Geometria płaska

Inaczej znana jako geometria Euklidesowa (wspomniana już we „Wstępnie do geometrii”) . Geometria płaska dla osób nie mających stycznością z tą dziedziną matematyki wydaje się mieć zastosowanie jedynie do obliczania pól i obwodów figur płaskich. Tą zaletę wykorzystuje się w nauczaniu ponadgimnazjalnym, tylko, że nie wspomina się o innych zastosowaniach geometrii płaskiej. Wykorzystuje się ją w budownictwie, architekturze oraz grafice komputerowej, co w dzisiejszych czasach jest spotykane na porządku dziennym.

1. Wstęp do geometrii płaskiej

Pojęcia podstawowe geometrii absolutnej:

a) relacje
- przynależności : Є
- rozdzielania : |
- przystawania : ≡

b) zbiory
- punktów : {A, B, C,...}
- prostych : {a, b, c,...}
- płaszczyzny : {α,β,χ ,...}

Opierają się one na czterech aksjomatach: rozdzielania, przystawania, icydencji oraz ciągłości.

Przykłady aksjomatów :

1.Z każdą prostą incydentne są co najmniej dwa punkty.
2.Jeżeli A|B|C to punkty ABC są współliniowe.
3.Od dowolnego punktu o należącego do prostej p można jednoznacznie po obu stronach odłożyć odcinki O_1O i OO_2 przystające do danego odcinka AB.

```
______|___________|___
      A           B
```

```
_____|__________|_________|_____
                O
```

2. Podstawowe pojęcia geometrii *

1) Odległość (metryka) - funkcja d, która każdej parze punktów przyporządkowuje liczbę nieujemną rzeczywistą, oraz spełnia warunki:

- d (A,B) = 0 ⇔ A=B [odległość AB jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy A jest równe B]
- d (A,B) = d (B,A) [odległość AB jest równa BA]
- d (A,B) ≤ d (A,C) + d (C,B) (nierówność trójkąta) [odległość (bok) trójkąta musi być mniejsza lub równa sumie dwóch pozostałych]

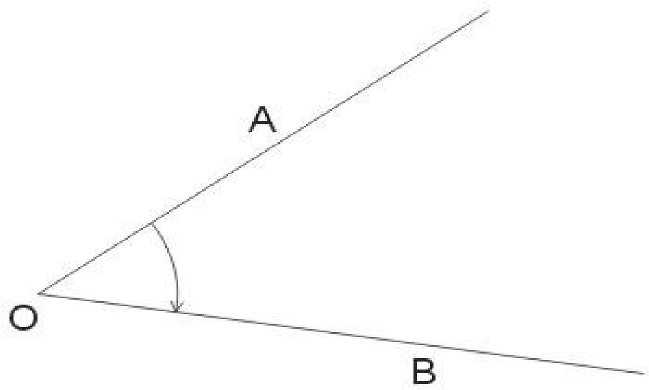
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

np.: A (2,2) oraz B (4,5)
wzór :
$d = \sqrt{[(4-2)^2 + (5-2)^2]} = \sqrt{[2^2 + 3^2]} = \sqrt{[4 + 9]} = \sqrt{13}$

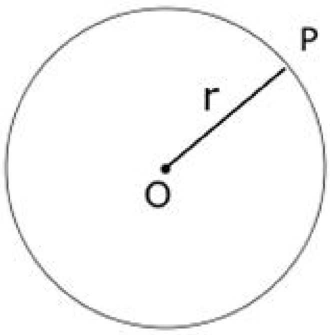
2) Odcinek – zbiór wszystkich punktów leżących między punktami A i B oraz punkty A i B

```
       A           B
_______|___________|_______
```

3) Dwie proste o wspólnym wierzchołku tworzą **kąt.**



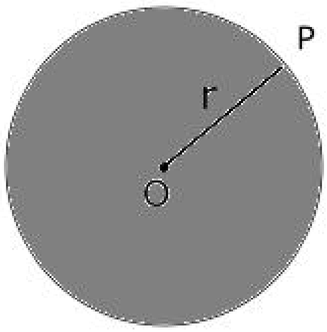
Istnieją kąty (m.in.) : proste, ostre, rozwarte, wewnętrzne, zewnętrzne, przystające, naprzemianległe, odpowiadające.

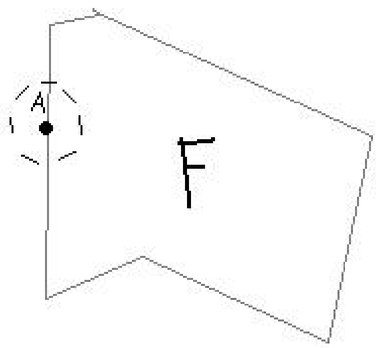


4) Okręgiem o środku O i promieniu r>O nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r. O(O,r)={P.;d(O,P.)=r}

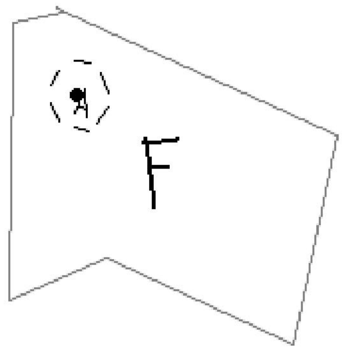
Kołem o środku O i promieniu r>O nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest nie większa niż r.

→ k(O,r)={P.;d(O,P.)≤ r}

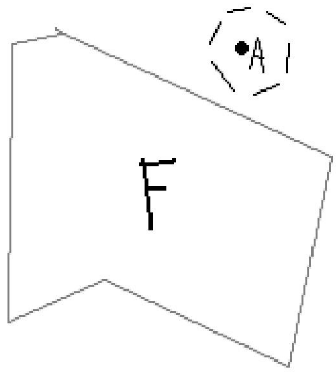




5) Punktem brzegowym figury F nazywamy punkt taki, że w każdym jego otoczeniu kołowym znajdują się zarówno punkty nie należące do niej. Zbiór wszystkich punktów figury nazywamy otoczeniem brzegowym figury F.



Punktem wewnętrznym figury F nazywamy punkt, który ma otoczenie zawarte w figurze F. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych nazywamy wnętrzem figury F.
Punktem zewnętrznym figury F nazywamy punkt , który ma otoczenie wolne od punktów figury F. Zbiór wszystkich punktów zewnętrznych nazywamy zewnętrzem figury F.



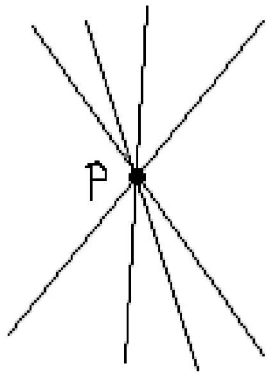
6) Dwie proste na płaszczyźnie mogą mieć:

- 1 punkt wspólny
- 0 punktów wspólny
- wszystkie punkty wspólne

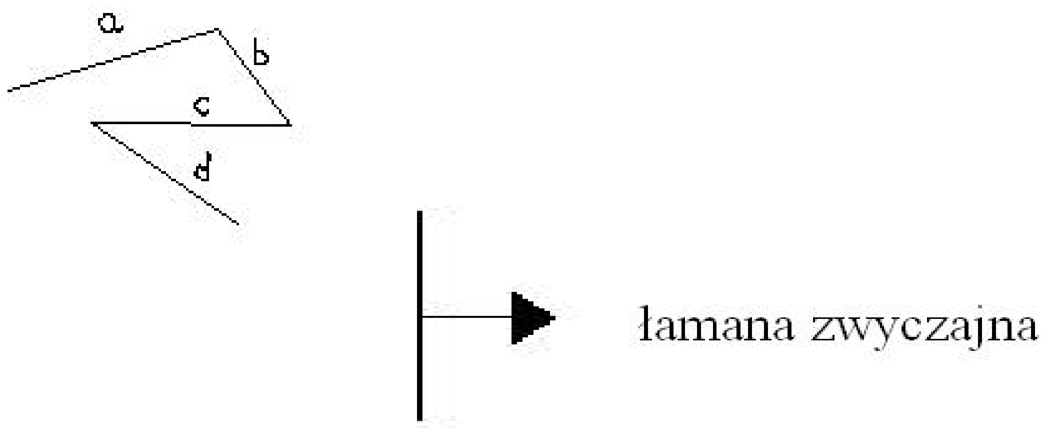
Proste mogą być do siebie:

- równoległe
- prostopadłe
- przecinające się / nie przecinające się

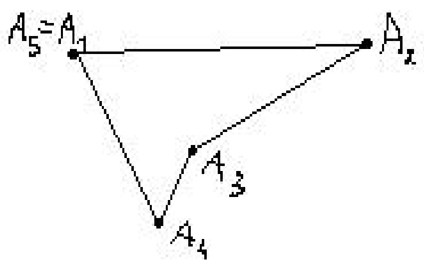
Pęk prostych – wszystkie proste przechodzące przez wspólny punkt



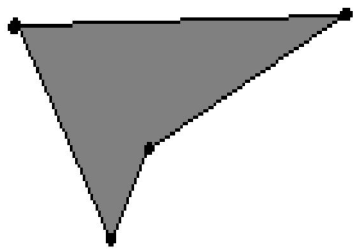
7) Łamana – suma odcinków (a, b, c, d,...) przy czym każde dwa odcinki są rozłączne lub mają dokładnie jeden punkt wspólny



Łamana zamknięta, gdy $A_1 = A_n$



8) Wielokąt – suma łamanej zamkniętej oraz figury ograniczonej wyciętej z płaszczyzny przez tą łamaną.

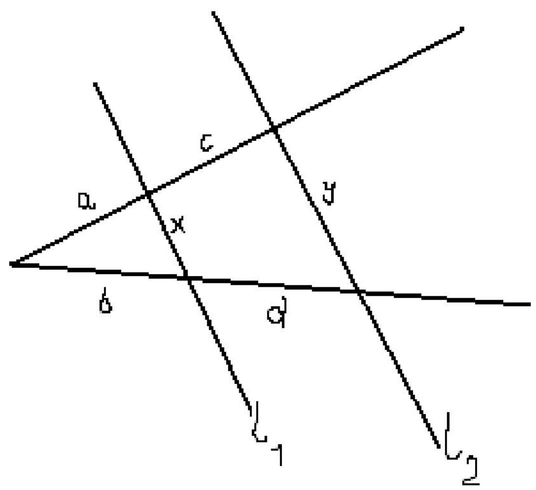


---

* Powyższe wprowadzenie do geometrii płaskiej (definicje) jest jedynie powierzchowne i nie zawiera wszystkich podstawowych definicji. W miarę rozwoju pracy będą dodawane kolejne, które wymagają wyjaśnienia.

3. Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi ($l_1 || l_2$), to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy takimi prostymi, że odcinki powstałe na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków powstałych na drugim ramieniu, to te proste są równoległe.

Zadanie

Podstawy trapezu mają długości a i b, zaś jego ramiona długości c i d. Oblicz długości x,y przedłużeń obu ramion trapezu do ich punktu przecięcia. Wykonaj obliczenia dla a=1,8 , b=1,2 , c=1,5 , d=1,2.

1) Rysunek. Układamy wzory:

$$\frac{y}{d} = \frac{z}{c} \rightarrow y = \frac{dz}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c+z}{z} \rightarrow az = bc + bz \rightarrow az - bz = bc \rightarrow z = \frac{bc}{a-b}$$

$$\begin{cases} y = \frac{dz}{c} \\ z = \frac{bc}{a-b} \end{cases}$$

2) Podstawiamy do wzorów:

$$\begin{cases} y = \frac{1,2z}{1,5} \\ z = \frac{1,5 \cdot 1,2}{1,8-1,2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1,2 \cdot 3}{1,5} \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1,2z}{1,5} \\ z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2,4 \\ z = 3 \end{cases}$$

wynik:
y = 2,4
x = 3

4. Wzory trygonometryczne

Dla danych punktów A, B, C E, nie leżących na jednej prostej:

- odcinki *[A,B], [B,C], [C,A]* nazywamy bokami,
- liczby a = d(B, C), b = d(C, A), c = d(A, B) - długościami boków,
- liczby α, β i γ - kątami wewnętrznymi trójkąta (euklidesowego) ABC

1) Twierdzenie sinusów

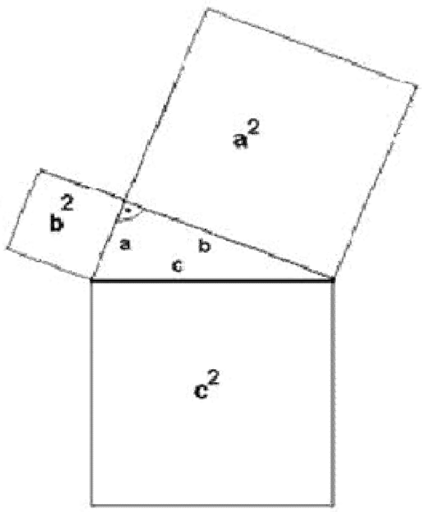
$$ {}^{a}/_{\sin\alpha} = {}^{b}/_{\sin\beta} = {}^{c}/_{\sin\gamma} $$

2) Twierdzenie cosinusów

$$ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma $$

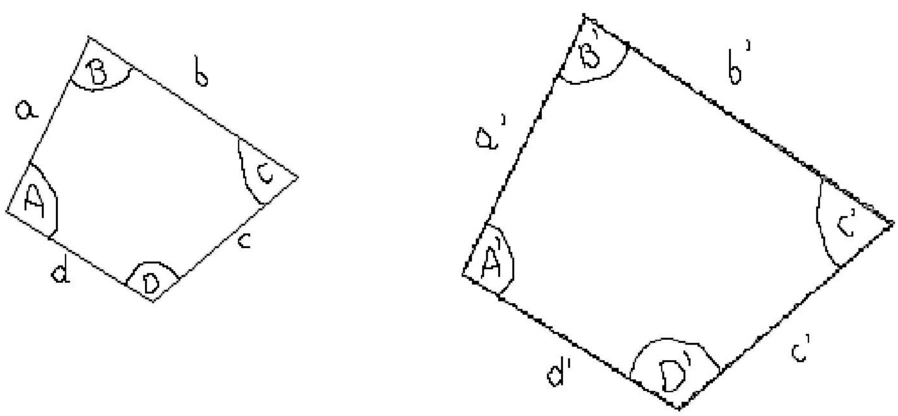
3) Twierdzenie Pitagorasa

$$ c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad \gamma = {}^{\pi}/_{2} $$



5. Podobieństwo figur

Wielokąty są podobne, jeżeli mają odpowiednie kąty równe i odpowiednie boki proporcjonalne.

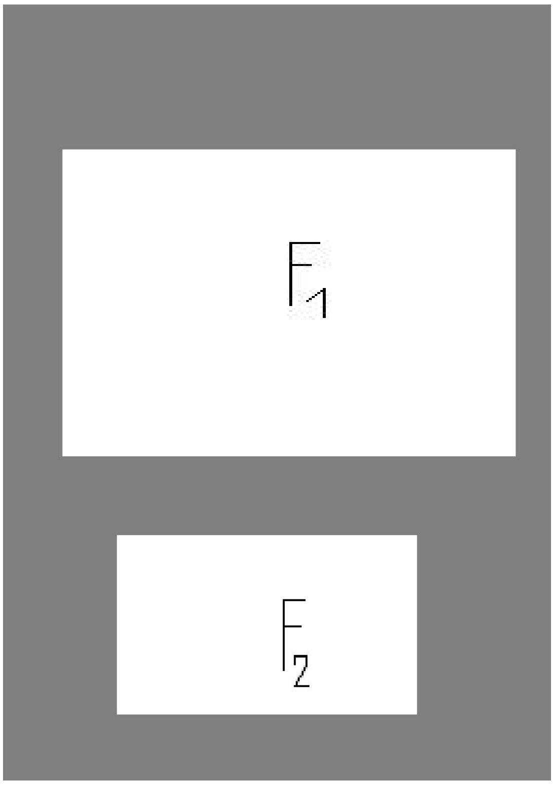


* gdzie *k* oznacza „podobny”

Jeśli

a : a` = b : b` = c : c` = k
A = A` ; B = B` ; C = C`

to figury są podobne.



stosunek boków

a : a` = k

b) stosunek obwodów

$obw_1 : obw_2 = k$

c) stosunek pól (!)

$P_1 : P_2 = k^2$

Przyjmijmy, że pewnym jest, że boki obu figur spełniają powyższy warunek o podobieństwie boków. Wtedy mówimy, że figura F_1 jest podobna do F_2 a ich skala podobieństwa wynosi k.

5. Podobieństwo trójkątów

1) BKB

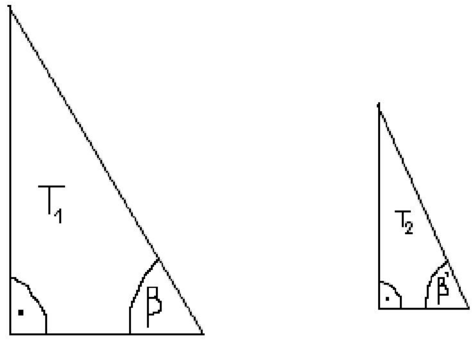
- jeżeli dwa boki w trójkącie ABC są proporcjonalne do odpowiednich boków trójkąta A`B`C`, a kąty pomiędzy tymi bokami są równe, to te trójkąty są podobne
- „bok-kąt-bok”

2) BBB

- jeżeli wszystkie boki trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich boków trójkąta A`B`C`, to te trójkąty są podobne
- „bok-bok-bok”

3) PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW PROSTOKĄTNYCH

- trójkąty prostokątne są podobne, jeżeli mają jeden z kątów ostrych równej mierze



- wtedy również drugi kąt ostry jest odpowiednio równe

Jeżeli : $\beta = \beta`$ to $T_1 = T_2$

Podsumowanie

Geometria obecna jest w matematyce jako jedna z najstarszych dziedzin, która ma szerokie zastosowanie w architekturze, nawigacji, geodezji i innych działaniach związanych z budową przestrzenną lub planowaniem na papierze. Wszelkiego rodzaju obliczenia związane z wielokątami (czy to sferycznymi czy płaskimi) kształtowały się przez wiele lat i zostały udoskonalone, by można było w XXI wieku wykorzystywać wszystkie ich zalety. Istnieją znaczące i niepodważalne różnice we wzorach tyczących się geometrii euklidesowej oraz sferycznej.

Pierwszą ze znaczących różnic są wzory na obliczanie katów czy boków w trójkątach (*ad 4. Wzory trygonometryczne; Geometria płaska oraz ad 2.2. Trójkąt Eulerowski; Geometria sferyczna*). W poniższej tabelce zebrano czynniki podobne oraz różniące oba rodzaje trygonometrii.

PODOBIEŃSTWA	
Trygonometria sferyczna	*Trygonometria płaska*
- twierdzenia sinusów, cosinusów, cotangensów - wzór na pole trójkąta - wartości kątów w trójkacie zapisywane mogą być za pomocą stopni, x^o - trójkąt zawsze posiada trzy boki oraz trzy kąty wewnętrzne - zastosowanie w architekturze i projektowaniu wnętrz	
RÓŻNICE	
- różne wzory twierdzeń	
- działania na sferze (kuli)	- działania na płaszczyźnie
- suma kątów w trójkącie jest większa od 180º ale mniejsza od 540º	- suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180º
- długość boków podawana w stopniach	- zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- inna możliwa jednostka (i częściej wybierana)	- zastosowanie twierdzenia Talesa

służąca do zapisu miar kątów - *rad*	
- charakterystyczne założenia własności trójkątów sferycznych (*ad 2.1. Własności trójkątów sferycznych; 2. Trygonometria sferyczna; Geometria sferyczna*)	- boki określane są jednostkami takimi jak *cm, m* itd.
- zastosowanie w astronomii i nawigacji	- planowanie figur na płaszczyźnie
- obwód trójkąta nie może być większy od obwodu koła wielkiego	- obwód trójkąta oraz jego pole jest niezależne od płąszczyzny, na jakiej się znajduje
- pole nie może być większe niż połowa obwodu sfery	- suma dwóch kątów wewnętrzych w trójkącie jest większa niż miara pozostałego kąta **A + B > C**
- kąt powiększony o 180º ma większą miarę od sumy dwóch pozostałych **C + 180º > A + B**	

Zasadniczą różnicą między obiema opisywanymi geometriami są definicje słów „płaska" i „sferyczna". Z zależności od tych dwóch przymiotników na takie pojęcia jak trójkąt, wielokąt czy linia, należy spojrzeć pod zupełnie innym kątem (na przykładzie trójkąta) Zasadniczo nawiązując do matematyki uczonej w podstawówkach czy gimnazjach definicję trójkąta określa się m.in. zwrotem „o sumie kątów równej 180º". W bardzo prosty sposób można udowodnić prawdziwość tego twierdzenia:

~ jeżeli suma kątów w wielokącie wynosi 180º to jest to trójkąt (czyli figura o trzech kątach). Jednakże warto by było zwrócić uwagę na fakt, że w matematyce nic nie jest do końca stabilne. Zasady można podważyć, udowadniając inną rację niż zakładano. W tym przypadku figura geometryczna na sferze o trzech kątach jest z pewnością nazywana trójkątem, ale jej suma kątów wewnętrznych ma znacznie większą wartość niż 180.

Streszczenie

Geometria jako jedna z dziedzin matematyki pozwala na szerokie i nieograniczone spojrzenie na znane zasady i pojęcia. Porównując geometrię sferyczną z płaską (czyli euklidesową) mamy do czynienia z konfliktem definicji, którego nie należy traktować jako błędu. W celu jak najprostszego ale i obrazowego wyjaśnienia poprzedniego stwierdzenia, które zdaje się być nielogicznym, warto przyjrzeć się szczególnie trygonometrii.

Podobieństwami jakie są zauważalne w każdej z rodzajów geometrii są figury i ich najprostsze definicje. Np. trójkąt to figura geometryczna na płaszczyźnie o trzech wierzchołkach, mająca trzy kąty oraz boki. Różnice dostrzegane są po większym zagłębieniu się w szczegóły geometrii sferycznej oraz euklidesowej. Najbardziej podstawową jest różnica w sumie kątów wewnętrznych trójkąta:

1. *geometria płaska* – suma miar katów wewnętrznych JEST RÓWNA 180º
2. *geometria sferyczna* – suma miar kątów wewnętrznych JEST MNIEJSZA od 360º

Aby zobrazować to zagadnienie warto posłużyć się przedmiotami, które otaczają nas w codziennym życiu. W okresie świątecznym można dostrzec wiele figur na sferze, czyli po prostu wzorów na bombkach, które wieszamy na choinkach lub w oknach czy witrynach sklepowych. Jeżeli chcemy znaleźć przykłady geometrii płaskiej wystarczy spojrzeć na obraz na ścianie, którego rama jest prostokątem lub kwadratem. Trójkątne znaki drogowe również znajdują się na płaszczyźnie, a samochodowy GPS działa na zasadzie odbijania i przesyłania fal ,które tworzą obraz właśnie dzięki trygonometrii sferycznej. Przykładów można by podawać bez końca i każdy znajdzie coś nowego. Zasadnicze różnice również łatwo dostrzec, ale te matematyczne, obliczeniowe lub opisowe wymagają większego zagłębienia się w studiowanie matematyki. Jednakże to czego można się dowiedzieć, chociażby w najmniejszym stopniu, ułatwia dostrzeganie różnic w otaczającym nas świecie. Zdecydowanie ta praca nie wyczerpuje rozległego tematu jaką jest porównanie geometrii sferycznej i euklidesowej, ale daje podstawy, które mogą zachęcić do większego studiowania podanych zagadnień.

Praca opiera się na osobnym i ogólnikowym opisaniu każdej z geometrii by potem zagłębiając się w szczegóły zaznaczaj coraz bardziej istotne różnice. Również wykonanie przykładowych zadań krok po kroku pokazuje, jak bardzo różnią się działania na sferze od tych na płaszczyźnie. W pracy można wyraźnie zauważyć, że dużą jej część zajmują zagadnienia dotyczące trygonometrii, ponieważ są one w moim doświadczeniu wyraźnie obrazujące różnice, które należało skontrastować oraz ułatwiają wyjaśnienie bardziej skomplikowanych struktur matematycznych (np. wzorów trygonometrycznych lub pojęcia „rad”).

Bibliografia

1. Wykłady dr hab. Leszka Smolarka ; "Geometria odwzorowań inżynierskich" E. Koźniewski;
2. Praca magisterska http://im0.p.lodz.pl/~kubarski/mgr/magisterka-Seczek.pdf;
3. "Geometria" Maczar
4. Wykłady "Geometria sferyczna" Justyny Wolskiej